THEME 8

UTILISATION DE FORMULES
CALCUL D'UNE EXPRESSION (1)
CORRECTION

▶ SATELLITE :

Un satellite en orbite autour de la Terre parcourt un cercle dont le centre est celui de la Terre à la vitesse v donnée par la formule :

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_T}{R_T + h}}$$

avec :

G constante de la gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m².kg^{-2}

M_T masse de la Terre. $M_T = 5{,}9736 \times 10^{24}$ kg

R_T rayon de la Terre $R_T = 6378{,}14$ km (à l'équateur) (en mètres dans la formule)

h altitude du satellite (par rapport au sol) (en mètres dans la formule)

La vitesse est alors exprimée en m/s (m.s^{-1})

<u>a)Cas d'un satellite SPOT :</u>

Tous les satellites SPOT évoluent à une altitude de 820 km.

Vitesse de ce satellite :

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}9736 \times 10^{24}}{6378{,}14 \times 10^3 + 820 \times 10^3}}$$

[√] [(] [6] [,] [6] [7] [10^x] [(−)] [1] [1] [×] [5] [,] [9] [7] [3] [6] [10^x] [2] [4] [÷] [(] [6] [3]
[7] [8] [,] [1] [4] [10^x] [3] [+] [8] [2] [0] [10^x] [3] [)] [)]

v = 7439,96 soit environ **7440 m/s**

<u>b)Cas d'un satellite TELECOM :</u>

Les satellites TELECOM sont positionnés sur une orbite située à 35 786 km d'altitude au-dessus de l'équateur de la Terre, dans le plan équatorial.

▷ Vitesse de ce satellite :

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}9736 \times 10^{24}}{6378{,}14 \times 10^3 + 35786 \times 10^3}}$$

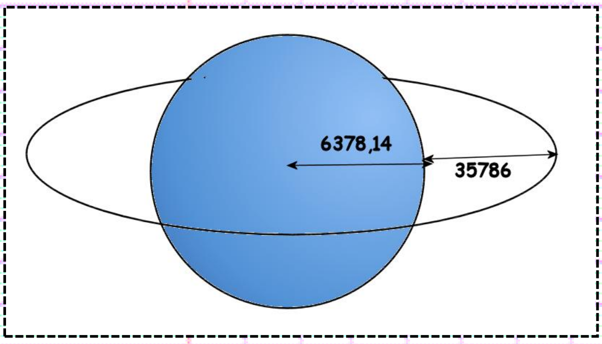
[√] [(] [6] [,] [6] [7] [10^x] [(−)] [1] [1] [×] [5] [,] [9] [7] [3] [6] [10^x] [2] [4] [÷] [(] [6] [3]
[7] [8] [,] [1] [4] [10^x] [3] [+] [3] [5] [7] [8] [6] [10^x] [3] [)] [)]

v = 3074,03 soit environ **3074 m/s**

Remarque :

Plus le satellite sera haut en altitude, moins sa vitesse sera importante !

▷ Longueur du trajet de ce satellite lors d'un tour complet :
Nous pouvons ici faire le calcul en km (afin d'éviter de trop grands nombres ou des puissances de 10)



Le trajet du satellite est égal à la circonférence d'un cercle de rayon $6378{,}14+35786$ km.

$2\times\pi\times(6378{,}14+35786)$ soit 264 925,105 km

soit 264 925 105 m

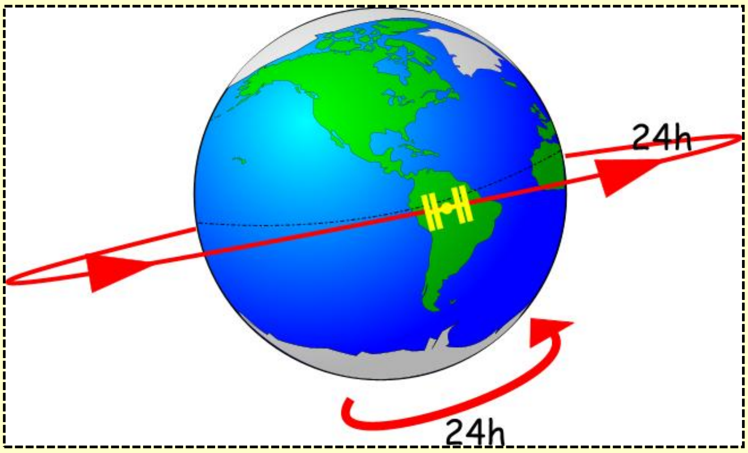
▷ Période de révolution de ce satellite (La période de révolution est le temps mis par le satellite pour accomplir sa trajectoire, ou révolution, autour de la Terre).

$$t=\frac{d}{v}=\frac{264\,925\,105}{3074}\approx 86\,182\,s$$

▷ Comparer ce temps à la période de rotation de la Terre sur elle-même (23 heures 56 minutes)
En faisant des divisions euclidiennes par 60 , nous avons :
$86182 = 1436 \times 60 + 22$
Donc 86182 s = 1436 min + 22 s
$1436 = 23 \times 60 + 56$
Donc 86182 s = 23 h + 56 min + 22 s
Le satellite tourne autour de la Terre en environ 23h 56 min, soit le temps que met la Terre pour faire un tour sur elle-même.

Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui se trouve sur une orbite géostationnaire.
Un satellite sur cette orbite située à 35 786 km d'altitude possède une période de révolution très exactement égale à la période de rotation de la Terre et paraît immobile par rapport à un point de référence à la surface de la Terre, c'est-à-dire reste toujours à la verticale du même point sur terre, propriété utilisée pour en faire des satellites d'observation, de télécommunications, ou bien de télédiffusion. Pour respecter cette propriété, un satellite géostationnaire se situe forcément dans le plan de l'équateur.

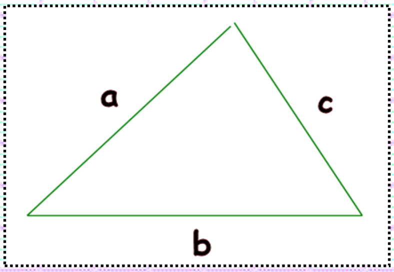


Remarque :

Pourquoi la période de rotation de la Terre n'est pas de 24 h , mais de 23 h 56 min ?
Cela tient à ce qu'en un jour, la Terre s'est légèrement déplacée dans son mouvement de révolution autour du Soleil.

▶ FORMULE DE HERON

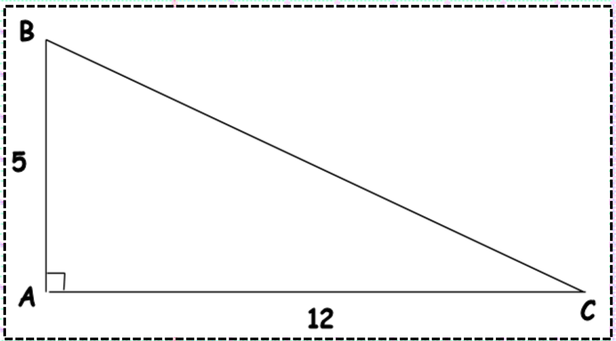
L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a , b et c est donnée par la formule (dite de Héron) suivante :



$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{a+b+c}{2}$$

p s'appelle le demi-périmètre.

▷ Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 5 (cm) et AC = 12 (cm).



a)Aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A} = \frac{5\times12}{2} = \frac{5\times2\times6}{2} = 30\,cm^2$$

b)Calcul de la longueur du côté [BC] :

Dans le triangle ABC rectangle en A
D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

$BC = \sqrt{169} = 13$

c)Utilisation de la formule de Héron pour (re)calculer l'aire du triangle ABC :

Calculons tout d'abord le demi-périmètre p.

Nous avons : $p = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15$

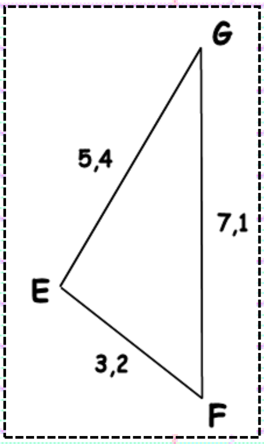
Et par suite $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15\times(15-5)\times(15-12)\times(15-13)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{15\times10\times3\times2} = \sqrt{900} = 30(cm^2)$

Ou $\mathcal{A} = \sqrt{15\times10\times3\times2} = \sqrt{5\times3\times5\times2\times3\times2} = \sqrt{2^2\times3^2\times5^2} = \sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5^2} = 2\times3\times5 = 30\,(cm^2)$

▷ Soit EFG un triangle vérifiant EF = 3,2 (cm) , EG = 5,4 (cm) et FG = 7,1 (cm)

Calcul de l'aire de ce triangle : (valeur approchée au centième de cm²)



$$p = \frac{3{,}2+5{,}4+7{,}1}{2} = \frac{15{,}7}{2} = 7{,}85$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7{,}85\times(7{,}85-3{,}2)\times(7{,}85-5{,}4)\times(7{,}85-7{,}1)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{7{,}85\times4{,}65\times2{,}45\times0{,}75} = \sqrt{67{,}07334375} \approx 8{,}19\,(cm^2)$$

▷ Soit MNP un triangle vérifiant MN = 7 (cm) , MP = 9 (cm) et NP = 8 (cm)

Calculer, en utilisant la formule de Héron, l'aire exacte de ce triangle. (écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$)

Nous avons :

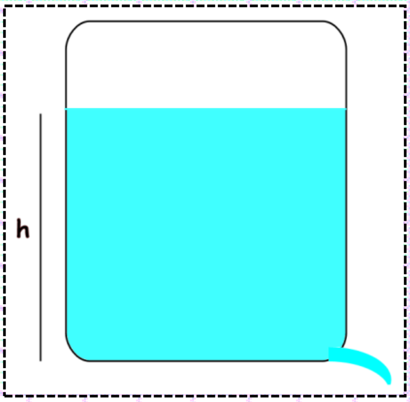
$$p=\frac{7+8+9}{2}=\frac{24}{2}=12$$

$$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12\times(12-7)\times(12-8)\times(12-9)}$$

$$\mathcal{A}=\sqrt{12\times5\times4\times3}=\sqrt{4\times3\times5\times4\times3}=\sqrt{4^2\times3^2\times5}\approx\sqrt{4^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}=4\times3\times\sqrt{5}=12\sqrt{5}\,(cm^2)$$

▶ VITESSE D'ECOULEMENT

Un réservoir de 3 mètres de haut est percé à sa base. La vitesse v d'écoulement de l'eau est donnée par la formule :



$$\boxed{v=\sqrt{2gh}}\quad(\text{en m/s})$$

avec

$g = 9{,}81\ m/s^2$

h hauteur d'eau au dessus du trou, exprimée en mètres.

a)Le réservoir est plein. Vitesse d'écoulement de l'eau à cet instant :

$$v=\sqrt{2\times9{,}81\times3}=\sqrt{58{,}86}\approx7{,}67m/s$$

b) Le réservoir n'est qu'à moitié plein. Vitesse d'écoulement de l'eau :

Lorsque le réservoir est à moitié plein (ou à moitié vide), la hauteur d'eau est h = 1,5 m

Nous avons donc : $v=\sqrt{2\times9{,}81\times1{,}5}=\sqrt{29{,}43}\approx5{,}42m/s$

POIDS IDEAL

Il existe différentes formules pour calculer le poids idéal (PI). L'une d'elle est la formule de Lorentz (datant de 1929). Cette formule ne doit être utilisée que pour un âge supérieur à 18 ans et une taille comprise entre 140 et 220 cm.

Poids idéal Masculin (en Kg) = Taille (en cm) - 100 - ((Taille (en cm) - 150) /4)

Poids idéal Féminin (en Kg) = Taille (en cm) - 100 - ((Taille (en cm) - 150) /2,5)

a)Formule définissant le poids idéal féminin P_{Femme} en fonction de la taille t.

$$P_{Femme}=t-100-\frac{t-150}{2{,}5}$$

b)Poids idéal d'un homme de 1,65 m , de 1,72 m , de 1,85 m et d'une femme de 1,62 m , de 1,72 m et de 1,80 m :

▶ HOMME :

Taille (en cm)	165	172	185
Poids idéal (kg)	$165-100-\frac{165-150}{4}$ = 61,25	$172-100-\frac{172-150}{4}$ = 66,5	$185-100-\frac{185-150}{4}$ = 76,25

$$165-100-\frac{165-150}{4}=65-\frac{15}{4}=65-3{,}75=61{,}25\ (kg)$$

$$172-100-\frac{172-150}{4}=72-\frac{22}{4}=72-5{,}5=66{,}5\,(kg)$$

$$185-100-\frac{185-150}{4}=85-\frac{35}{4}=85-8{,}75=76{,}25\,(kg)$$

▶ FEMME :

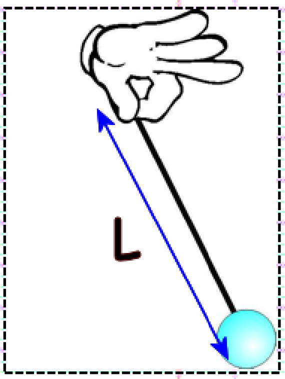
Taille (en cm)	162	172	180
Poids idéal (kg)	$162-100-\frac{162-150}{2{,}5}$ = 57,2	$172-100-\frac{172-150}{2{,}5}$ = 63,2	$180-100-\frac{180-150}{2{,}5}$ = 68

$$162-100-\frac{162-150}{2{,}5}=62-\frac{12}{2{,}5}=62-4{,}8=57{,}2\,(kg)$$

$$172-100-\frac{172-150}{2{,}5}=72-\frac{22}{2{,}5}=72-8{,}8=63{,}2\,(kg)$$

$$180-100-\frac{180-150}{2{,}5}=80-\frac{30}{2{,}5}=80-12=68\,(kg)$$

PENDULE



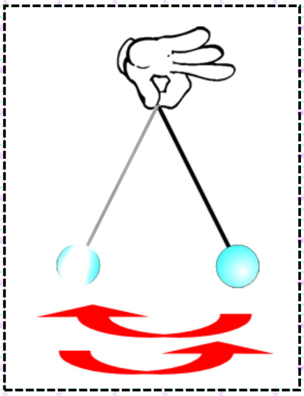
La période (temps mis par la masse pour aller et revenir à son point de départ) est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \quad \text{(en seconde)}$$

avec

$g = 9{,}81\ m/s^2$

L longueur du pendule (en mètres)



a) Période d'un pendule de longueur 50 cm :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}}\approx 1{,}42\,s$$

b) Période d'un pendule de longueur 75 cm :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}75}{9{,}81}}\approx 1{,}74\,s$$

c) Longueur de fil permettant à un pendule de « battre la seconde » :(période de 2 secondes)

T = 2 s donc $2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}81}}=2\ (s)$

Donc $\sqrt{\frac{L}{9{,}81}}=\frac{2}{2\pi}$, puis $\sqrt{\frac{L}{9{,}81}}=\frac{1}{\pi}$

En élevant au carré, nous obtenons : $\frac{L}{9{,}81}=(\frac{1}{\pi})^2$ soit $\frac{L}{9{,}81}=\frac{1}{\pi^2}$ et ensuite $L=\frac{9{,}81}{\pi^2}$

soit $L\approx 0{,}99396(m)$

Un pendule battant la seconde a une longueur (longueur de fil) d'environ 1 m .