THEME 8

SAVOIR FACTORISER UNE EXPRESSION

Introduction :

Brevet des Collèges – Académie du Sud-Est – Année 2000 (Extrait)

On donne

$$C = (4x - 3)^2 - (6x + 1)(4x - 3)$$

Factoriser C.

Que signifie « Factoriser l'expression C »
« Mettre l'expression C sous forme d'un produit de facteurs » a la même signification et est certainement plus explicite.
L'expression C apparaît sous la forme d'une somme algébrique de plusieurs termes

Somme algébrique :

Si nous considérons l'expression $A = 5 + 2 - 6$, nous ne pouvons pas parler de somme, puisqu'un signe « - » (symbole de la soustraction) apparaît.
Mais, depuis que nous connaissons les nombres relatifs, nous pouvons écrire :

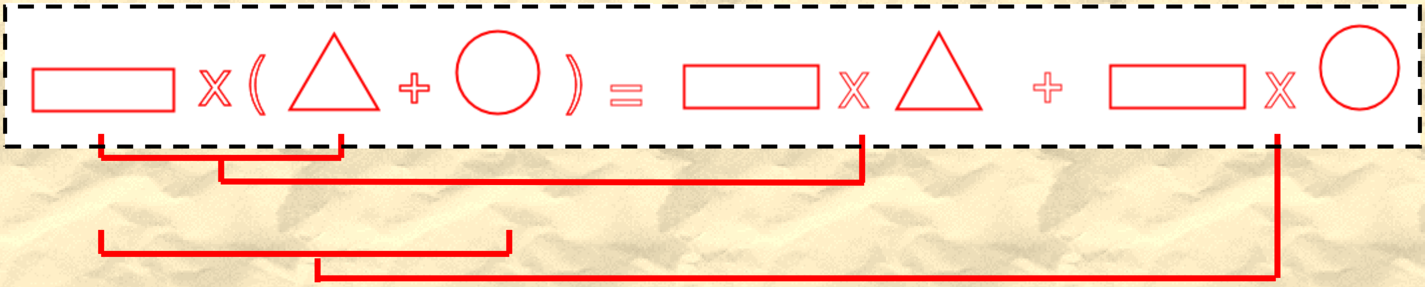
$$A = 5 + 2 + (- 6)$$

Cette expression peut donc être réellement considérée comme une somme.
L'expression $5 + 2 - 6$ sera donc appelée « somme algébrique » .
On appelle « somme algébrique » toute suite de termes séparés par les signes + ou - .

Factoriser cette expression consiste à changer cette « somme » en un produit.
Transformer une expression en un produit de facteurs s'appelle la factorisation.
Pour ce faire, nous utiliserons la propriété suivante :

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction.

C'est à dire :



Lorsque nous utilisons cette égalité dans le sens gauche-droite, cette transformation s'appelle un développement.

Mais une égalité peut être luie dans le sens droite-gauche. Dans ce cas, la transformation s'appelle une factorisation.

Si nous écrivons :

$$2 \times (5 + 3) = 2 \times 5 + 2 \times 3$$

nous développons. (Le résultat est écrit sans enveloppe , c'est à dire sans parenthèses – ou plus rigoureusement, nous transformons un produit en une somme)

Inversement, si nous écrivons :

$$2 \times 5 + 2 \times 3 = 2 \times (5 + 3)$$

nous factorisons (L'écriture obtenue est un produit !)

Comment factoriser ?

Regarder l'expression

Souligner les termes

Exemples :

Considérons l'expression suivante : $(2x + 3)(x - 5) - (2x + 3)(2x - 1)$

Cette expression comporte deux termes :

$$\underline{(2x + 3)(x - 5)} - \underline{(2x + 3)(2x - 1)}$$

Considérons maintenant l'expression suivante :

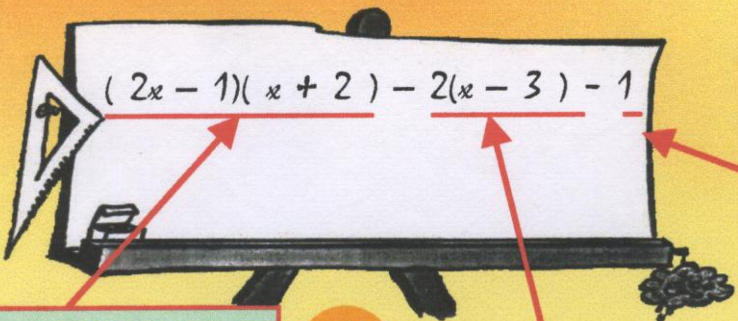
$2x^2 - 50 + (x + 5)(x - 3)$

Cette expression est formée de trois termes . Soulignons-les :

$$\underline{2x^2} - \underline{50} + \underline{(x+5)(x-3)}$$

Comment trouver les termes dans une expression ?

Dans une expression du type 2 + 3 – 5 , les termes sont 2 , 3 et 5 .
Les termes d'une somme algébrique sont les différents éléments qui composent cette somme.
Dans une expression, pour déterminer les termes, il suffit de repérer les différents signes + ou – , non situés entre parenthèses.



1
On commence à souligner

On rencontre un signe -, mais situé entre parenthèses, donc on continue.

A nouveau un signe +, mais situé entre parenthèses. On continue.

Un signe – hors des parenthèses. On s'arrête.
Fin du premier terme

2
On recommence à souligner après le signe.

On rencontre un signe -, mais situé entre parenthèses, donc on continue.

Un signe – hors des parenthèses. On s'arrête.
Fin du deuxième terme

3
On recommence à souligner après le signe.

Pas de signe
Fin de l'expression
Fin du troisième terme

Si le premier symbole de l'expression est un signe (- généralement), **ne pas le prendre en compte.**
Exemple :
$\underline{-(2x+1)(x-1)} - \underline{(x+3)}$

Observer les termes

1 UN FACTEUR COMMUN EST EVIDENT

Exemple 1 :

Factoriser l'expression suivante :

$$A = \underline{(x-2)(x+3)} - \underline{(x-2)(2x+5)} + \underline{(4x-7)(x-2)}$$

Dans cet exemple, chaque terme comporte le facteur commun (x – 2). Soulignons-le.

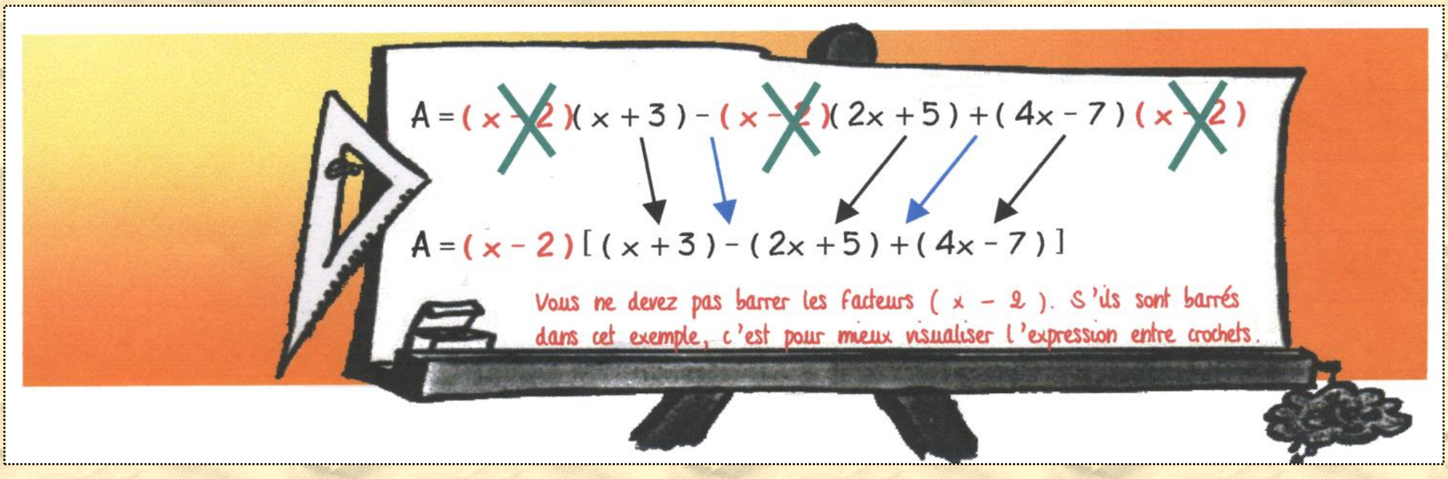
$$A = \underline{(x-2)}\,\underline{(x+3)} - \underline{(x-2)}\,\underline{(2x+5)} + \underline{(4x-7)}\,\underline{(x-2)}$$

Mettons (x – 2) en “ facteur ” .

$$A = (x-2)\,[\,(x+3) - (2x+5) + (4x-7)\,]$$

En langage simple , nous pouvons dire que l'expression située entre crochets est composée

- de ce qui “ reste” dans chaque terme après avoir enlevé le facteur commun.
- des signes d'opérations existants.



Remarque :

Nous constatons , et cette remarque est importante, que le nombre de termes situés entre crochets est le même que le nombre de termes de l'expression initiale.

Simplifions maintenant l'écriture du deuxième facteur. Nous obtenons (suppression des parenthèses situées dans les crochets – attention aux changements de signes) :

$$A = (x-2)\,[\;x+3\; - \;2x-5\; + \;4x-7\;]$$

Après réduction (simplification) de ce deuxième facteur, nous avons : (nous pouvons remplacer les crochets par des parenthèses, les crochets étant apparus pour simplifier la lecture)

$$A = (x-2)(3x-9)$$

Le résultat ainsi obtenu est un produit de facteurs. C'est le produit, même si le symbole de multiplication n'apparaît pas, des facteurs (x – 2) et (3x – 9). L'expression est donc maintenant sous sa forme factorisée.

$$\boxed{A = (x-2)(3x-9)}$$

Remarque :

Bien que le résultat précédent soit satisfaisant, nous allons l'affiner afin d'avoir une factorisation la plus complète possible.

Le second facteur de ce produit est 3x – 9

Nous pouvons changer cette écriture en factorisant cette expression. Nous avons :

$$3x - 9 = 3(x-3)$$

Par conséquent, le résultat final est :

$$A = (x-2).\,3\,(x-3)$$ (le point représente ici le symbole de multiplication)

Soit, puisque dans un produit, nous pouvons changer l'ordre des facteurs ;

$A = 3(x - 2)(x - 3)$

$$\boxed{A = 3(x - 2)(x - 3)}$$

Les facteurs "simples" seront toujours placés au début de l'expression.

▶ Exemple 2 :

Factoriser l'expression suivante :

$$B = (x - 6)^2 + (x - 6)(2x + 3)$$

Cette expression est composée de deux termes.
D'après la définition de l'élévation à une puissance, le premier terme peut s'écrire $(x - 6)(x - 6)$. Nous avons donc :

$$B = \underline{(x - 6)(x - 6)} + \underline{(x - 6)(2x + 3)}$$

Le facteur $(x - 6)$ est commun aux deux termes . Nous pouvons commencer la factorisation.

Remarque :

Certains élèves soulignent, dans le premier terme, le second facteur $(x - 6)$. Pour cela , il faudrait que l'on puisse trouver , dans le second terme , un autre facteur égal à $(x - 6)$

$$B = \underline{(x - 6)(x - 6)} + \underline{(x - 6)(2x + 3)}$$

Facteur commun

Pour pouvoir souligner ce facteur, il faudrait trouver ce même facteur dans la partie non soulignée en rouge du second terme.

Revenons à la factorisation de l'expression B. Nous avons successivement :

$$B = (x - 6) [(x - 6) + (2x + 3)]$$
$$B = (x - 6) [x - 6 + 2x + 3]$$
$$B = (x - 6) (3x - 3)$$

Ce résultat est satisfaisant. Nous pouvons cependant continuer et obtenir :

$$B = (x - 6).\ 3(x - 1) = 3(x - 6)(x - 1)$$

$$\boxed{B = 3(x - 6)(x - 1)}$$

Remarque :

Par habitude, vous ne décomposerez plus $(x - 6)^2$ en $(x - 6)(x - 6)$

Remarque :

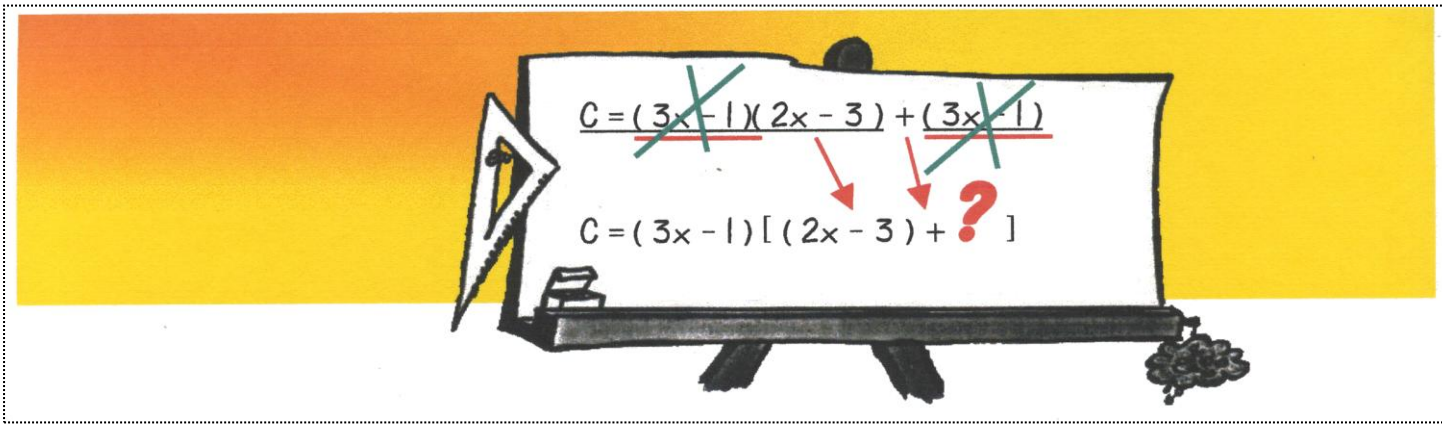
Au Brevet des Collèges, l'écriture $(x - 6)(3x - 3)$ est suffisante.

▶ Exemple 3 :

Factoriser l'expression suivante :

$$C = (3x - 1)(2x - 3) + (3x - 1)$$

Dans cet exemple, l'expression comporte deux termes et le facteur commun $(3x - 1)$ est évident.



Il faut cependant être prudent !

L'expression initiale comporte deux termes. L'expression entre crochets doit donc comporter deux termes. Mais quel est ce dernier terme ?

L'expression peut s'écrire :

$C = \underline{(3x-1)}(2x-3) + \underline{(3x-1)}\,.\,1$ (le point représente ici le symbole de multiplication)

Multiplier par 1 une expression ne change pas la valeur de cette expression (1 est dit neutre pour la multiplication).

Nous avons donc :

$C = (3x-1)[(2x-3) + 1]$

$C = (3x-1)[2x-3+1]$

$C = (3x-1)(2x-2)$

$\boxed{C = (3x-1)(2x-2)}$

Ou encore :

$C = (3x-1)(2x-2) = (3x-1).\,2(x-1) = 2(3x-1)(x-1)$

2 IL N'Y A PAS DE FACTEUR COMMUN

Chaque terme est-il écrit sous « sa forme la plus simple » ?

▶ ***Exemple 4 :***

Mettre sous forme d'un produit de facteurs l'expression suivante :

$D = (3x-2)(4x-3) - (6x-4)(x-2)$

Cette expression composée de deux termes n'a pas de facteur commun évident.

$$D = \underline{(3x-2)(4x-3)} - \underline{(6x-4)(x-2)}$$

Nous ne pouvons pas écrire plus simplement le premier terme. Par contre, le second terme peut se simplifier , ou plus précisément, s'écrire différemment.

Nous avons :

$$6x - 4 = 2(3x-2)$$

Par conséquent ,

$$D = \underline{(3x-2)(4x-3)} - \underline{2(3x-2)(x-2)}$$

Le facteur (3x – 2) est maintenant un facteur commun évident.

Nous obtenons successivement :

$$D = (\cancel{3x-2})(4x-3) - 2(\cancel{3x-2})(x-2)$$

$$D = (3x-2)[(4x-3) - 2(x-2)]$$

$$D = (3x-2)[\ 4x - 3 \ \ - 2x + 4\ ]$$

$$D = (3x-2)(2x+1)$$

$$\boxed{D = (3x-2)(2x+1)}$$

▶ *Exemple 5 :*

Factoriser l'expression suivante :

$$E = (x-2)(2x+3) - (x^2 - 4)$$

Cette expression, composée de deux termes, n'a pas de facteur commun évident.

Si le premier terme ne peut pas se simplifier, le second terme $x^2 - 4$ est un « développement remarquable ».

Nous avons :

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$$

Par suite :

$$E = \underline{(x-2)(2x+3)} - \underline{(x+2)(x-2)}$$

$$E = (x-2)[(2x+3) - (x+2)]$$

$$E = (x-2)[\ 2x + 3 \ - x - 2\ ]$$

$$E = (x-2)(x+1)$$

$$\boxed{E = (x-2)(x+1)}$$

▶ *Exemple 6 :*

Factoriser l'expression suivante :

$$F = (4x-2)^2 - (2x-1)(x+1)$$

➤ *Méthode 1 :*

$$F = \underline{(4x-2)^2} - \underline{(2x-1)(x+1)}$$

$$F = \underline{(4x-2)(4x-2)} - \underline{(2x-1)(x+1)}$$

Comme $4x - 2 = 2(2x-1)$

$$F = \underline{2(2x-1)\,.\,2(2x-1)} - \underline{(2x-1)(x+1)}$$

$$F = \underline{2\,.\,2\,(2x-1)(2x-1)} - \underline{(2x-1)(x+1)}$$

$$F = \underline{4\,(2x-1)(2x-1)} - \underline{(2x-1)(x+1)}$$

$$F = (2x-1)[4(2x-1) - (x+1)]$$

$F = (2x - 1)[8x - 4 - x - 1]$

$F = (2x - 1)(7x - 5)$

$\boxed{F = (2x - 1)(7x - 5)}$

➤ ***Méthode 2 :*** (à utiliser de préférence)

$F = \underline{(4x - 2)^2} - \underline{(2x - 1)(x + 1)}$

Comme $4x - 2 = 2(2x - 1)$

$F = \underline{[2(2x - 1)]^2} - \underline{(2x - 1)(x + 1)}$

$F = \underline{2^2(2x - 1)^2} - \underline{(2x - 1)(x + 1)}$

$F = \underline{4(2x - 1)^2} - \underline{(2x - 1)(x + 1)}$

$F = (2x - 1)[4(2x - 1) - (x + 1)]$

$F = (2x - 1)[8x - 4 - x - 1]$

$F = (2x - 1)(7x - 5)$

$\boxed{F = (2x - 1)(7x - 5)}$

Remarque :

L'erreur (à ne pas faire !) est de transformer $(4x - 2)^2$ en $2(2x - 1)^2$

3 IL N'Y A PAS DE FACTEUR COMMUN

L'expression est-elle une identité remarquable ?

▶ ***Exemple 7 :***

Factoriser l'expression suivante :

$G = (x - 2)^2 - (4x - 5)^2$

Cette expression comporte deux termes. Il n'y a pas de facteur commun et une simplification des différents termes ne donnerait rien !!!

Il faut apercevoir, dans cette écriture, une identité remarquable (différence de deux carrés)

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square + \triangle)(\square - \triangle)$$

En posant $\square = (x - 2)$ et $\triangle = (4x - 5)$, nous avons :

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square + \triangle)(\square - \triangle)$$

$G = (x-2)^2 - (4x-5)^2 = [(x-2)+(4x-5)][(x-2)-(4x-5)]$

$G = [(x-2)+(4x-5)][(x-2)-(4x-5)]$

$G = [x-2+4x-5][x-2-4x+5]$

$G = (5x-7)(-3x+3)$

$\boxed{G = (5x-7)(-3x+3)}$

Remarque :

Nous pouvons poursuivre cette transformation.

Nous avons $-3x+3 = -3(x-1)$

Donc

$G = (5x-7)(-3x+3) = (5x-7).(-3)(x-1) = (-3)(5x-7)(x-1) = -3(5x-7)(x-1)$

Parenthèses obligatoires
Sinon, nous écririons
$G = (5x-7) - 3(x-1)$
Cette écriture n'est plus un produit !

Parenthèses non obligatoires
C'est pourquoi nous les supprimons !

▶ *Exemple 8 : (plus rare en Troisième)*

Factoriser l'expression suivante :

$H = (x-1)^2 + 2(x-1)(2x+3) + (2x+3)^2$

Cette expression comporte trois termes et n'a pas, dans l'état actuel, ou après simplification d'écriture des termes, de facteur commun évident !

Il faut considérer l'expression dans son entier et constater que c'est une identité remarquable du type (carré d'une somme) :

$$\square^2 + 2\square\triangle + \triangle^2 = (\square + \triangle)^2$$

En posant $\square = (x-1)$ et $\triangle = (2x+3)$, nous avons :

$$\square^2 + 2\square\triangle + \triangle^2 = (\square + \triangle)^2$$

$H = (x-1)^2 + 2(x-1)(2x+3) + (2x+3)^2 = [(x-1)+(2x+3)]^2$

$H = [(x-1)+(2x+3)]^2$

$H = [x-1+2x+3]^2$

$H = (3x+2)^2$

$\boxed{H = (3x+2)^2}$

Remarque :

Cette expression est sous sa forme factorisée.

L'écriture $(3x+2)^2$ est une autre forme de $(3x+2)(3x+2)$.

Complément

4 DANS UN TERME, APPARAÎT L'OPPOSE D'UN EVENTUEL FACTEUR COMMUN

Exemple :

Factoriser l'expression suivante :

$J = (3x - 5)(5x - 4) - (5 - 3x)(x - 1)$

Cette expression comporte deux termes. Il n'y a pas de facteur commun évident. Ce n'est pas une identité remarquable.

$J = \underline{(3x - 5)(5x - 4)} - \underline{(5 - 3x)(x - 1)}$

Nous constatons que dans le premier terme figure le facteur (3x – 5) et dans le second, figure le facteur (5 – 3x).

Existe-t-il un lien entre ces deux facteurs ?

Nous avons :

$(5- 3x) = - (3x - 5)$

Par suite , l'expression J peut s'écrire :

$J = (3x - 5)(5x - 4) - [- (3x - 5)] (x - 1)$

Soit encore, en appliquant la règle des signes :

$J = (3x - 5)(5x - 4) + (3x - 5) (x - 1)$

Nous sommes revenus au cas " Un facteur commun est évident" . La forme factorisée est donc :

$J = (3x - 5) [(5x - 4) + (x - 1)]$

$J = (3x - 5) [5x - 4 + x - 1]$

$J = (3x - 5) (6x - 5)$

Remarques :

- Il n'y aucun lien entre 3x + 5 et 3x – 5 (ou plus généralement entre ax + b et ax – b)
- Soit à factoriser $J' = (2x - 1)(3x - 4) - (1 - 2x)^2$

  Si $(1 - 2x) = - (2x - 1)$, il est à remarquer que $(1 - 2x)^2 = [- (2x - 1)]^2 = (2x - 1)^2$

  Donc l'expression J' s'écrira :

  $J' = (2x - 1)(3x - 4) - (2x - 1)^2$ (pas de changement de signe !)

ORGANIGRAMME DE FACTORISATION :