THEME 8

MULTIPLICATION DES RELATIFS

▶ Produit de deux nombres relatifs :

* omis : Participe passé du verbe omettre.
Omettre : Oublier ou négliger de faire
Ne pas comprendre dans une énumération, un ensemble ; passer sous silence.

Remarque :

Un produit est le résultat d'une multiplication.

Rappel :

Un nombre relatif (entier ou décimal) se décompose en :

un signe (+ ou –) (Le signe + est souvent omis*)

un " nombre " que nous appelons " partie numérique " ou " distance à 0 " . (Un autre nom sera utilisé ultérieurement)

- 3

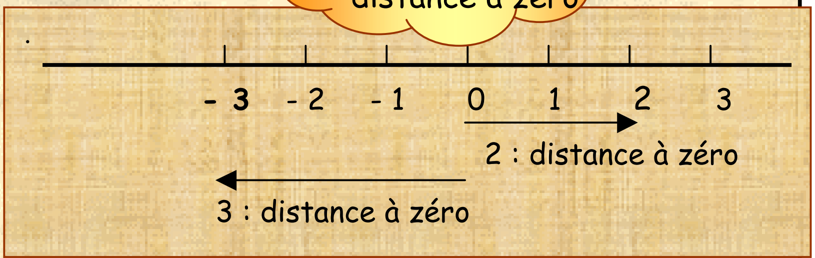
Signe -
Ce nombre est dit négatif.

Partie numérique ou distance à zéro

+ 2

Signe +
Ce nombre est dit positif.

Partie numérique ou distance à zéro



Définition et propriété :

Le produit de deux nombres relatifs est un nombre relatif ayant

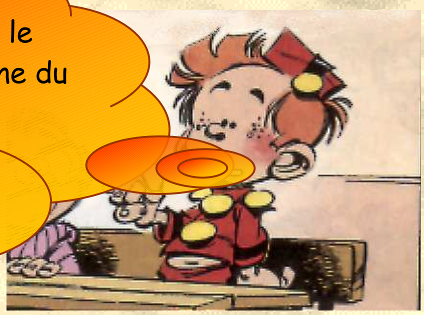
pour signe : + si les deux nombres relatifs sont de même signe.
– si les deux nombres relatifs sont de signes différents.

pour partie numérique (ou distance à zéro) le produit des parties numériques des deux nombres relatifs

Exemples :

➤ (+ 2) x (+ 3) = + 6

Les nombres sont de même signe (+ pour le premier et + pour le second), donc le signe du produit est +
Il suffit alors de multiplier les parties numériques 2 et 3 (2 x 3 = 6)
Le résultat est donc + 6, soit 6



Nous pouvons même écrire cette expression, en simplifiant :
(+ 2) x (+ 3) = 2 x 3
Cette opération est connue.
Son résultat est 6

➤ (+ 3) x (- 5) = - 15

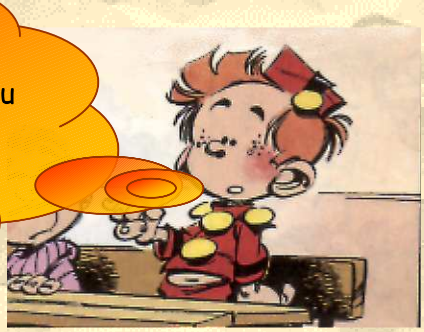
Les nombres sont de signes différents (+ pour le premier et - pour le second), donc le signe du produit est -
Il suffit alors de multiplier les parties numériques 3 et 5 (3 x 5 = 15)
Le résultat est donc - 15

➤ (- 4) x (+ 2) = - 8

Les nombres sont de signes différents (- pour le premier et + pour le second), donc le signe du produit est -
Il suffit alors de multiplier les parties numériques 4 et 2 (4 x 2 = 8)
Le résultat est donc - 8

➤ (- 3) x (- 4) = + 12 = 12

Les nombres sont de même signe (- pour le premier et - pour le second), donc le signe du produit est +
Il suffit alors de multiplier les parties numériques 3 et 4 (3 x 4 = 12)
Le résultat est donc + 12, soit 12



Remarque : Règle des signes

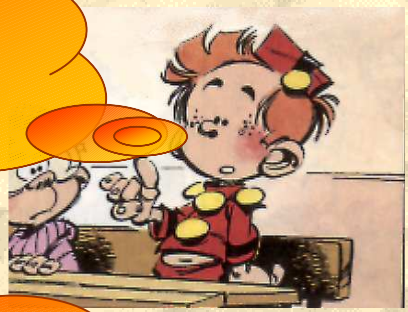
Une autre façon de déterminer le signe est d'utiliser la règle des signes que l'on représente souvent par le tableau suivant :

Signe du premier facteur	Signe du second facteur	Signe du produit
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Autres exemples :

$2 \times (-1{,}5) = -3$
$-3 \times 4{,}2 = -12{,}6$
$-2 \times (-7) = +14 = 14$

Dans le premier exemple , 2 est écrit sans signe.
Rappelons que 2 = + 2
Donc le signe de 2 est + (nous dirons que 2 est positif)



Remarque :

Donc, pour multiplier deux nombres relatifs, on cherche d'abord quel est le signe du produit, puis on calcule après le produit des parties numériques !

Généralement .
Cependant, dans certains calculs, il est préférable de calculer tout d'abord la partie numérique du produit.
$(-2) \times 0 = 0$
Dans cet exemple, il est inutile de rechercher le signe du produit, puisque la partie numérique est égale à 0.

Produits particuliers :

Soit a un nombre relatif.

☞ $0 \times a = a \times 0 = 0$ (O est dit " absorbant " pour la multiplication)

☞ $(-1) \times a = a \times (-1) = -a$

Multiplier un nombre relatif par - 1 revient à prendre son opposé. C'est à dire que l'opposé d'un nombre n'est rien d'autre que le produit de ce nombre par - 1.

Dans une leçon précédente, nous avions appris à simplifier des écritures qui comportaient des parenthèses d'écriture.

Par exemple l'écriture $-(-2)$ se simplifiait en $+2$. L'écriture $-(+3)$ se simplifiait en -3.
Or $-(-2)$ est l'opposé du nombre -2. Comme prendre l'opposé d'un nombre revient à multiplier ce nombre par -1, nous justifions ainsi la simplification adoptée (utilisation de la règle des signes).
$-(-2) = (-1) \times (-2) = +2 = 2$

Attention :

La règle des signes est simple, mais il faut encore préciser qu'elle n'est **vérifiée que pour des multiplications** (ainsi que pour des simplifications d'écritures dans lesquelles figurent des parenthèses d'écritures - cf. ci-dessus)
La règle des signes ne " marche pas pour tout " et en l'*appliquant* là où elle n'a que faire, elle se venge en produisant des erreurs.
Par exemple :

Faux

$-3 + 5 = -2$ (car - "par" + donne -)

▶ Produit de plusieurs nombres relatifs :

Dans le produit de 3 par 4,qui s'écrit 3 x 4, 3 et 4 sont des <u>facteurs.</u>
Plus généralement, dans le produit a x b , a et b s'appellent des <u>facteurs.</u>
Dans une somme a + b , a et b s'appellent des termes.

<u>Exemple :</u>

Soit à calculer :

A = - 3 x 2 x (- 7) x (- 1) x (- 5)

<u>Méthode 1 :</u>

Il suffit de calculer le produit des deux premiers facteurs, puis de multiplier le résultat que l'on a obtenu par le troisième facteur, et ainsi de suite :

A = - 3 x 2 x (- 7) x (- 1) x (- 5)

A = - 6 x (- 7) x (- 1) x (- 5)

A = 42 x (- 1) x (- 5)

A = - 42 x (- 5)

A = 210

<u>Méthode 2 :</u>

<u>Constatation 1 :</u>

Si, en utilisant la méthode précédente, nous calculions l'expression (- 7) x (- 3) x 2 x (- 5) x (- 1), expression obtenue en changeant la position des facteurs, nous obtiendrions le même résultat.

Règle 1 : Dans une suite de multiplications, nous pouvons changer l'ordre des facteurs.

<u>Constatation 2 : (cf. exercices)</u>

En regardant le tableau des signes, nous constatons que le signe + n'a aucune influence.

+	−	−
−	+	−

Seul les signes – déterminent le signe d'un produit.

S'il y a un seul signe – , le résultat aura pour signe –.

S'il y a deux signes –, le résultat aura pour signe +.

S'il y a trois signes –, le produit des deux premiers facteurs négatifs donnera un résultat positif. Il ne restera qu'un seul facteur négatif. Le résultat final aura donc pour signe –.

Règle 2 : Le produit de plusieurs nombres relatifs est positif si le nombre de facteurs négatifs est pair.

Le produit de plusieurs nombres relatifs est négatif si le nombre de facteurs négatifs est impair.

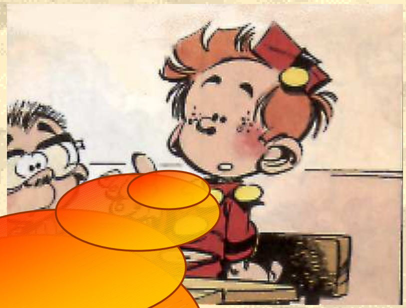
Revenons à notre exemple :

$A = -3 \times 2 \times (-7) \times (-1) \times (-5)$

$A = \quad + \ 3 \times 2 \times 7 \times 1 \times 5$

$A = \quad + \ 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 1$

$A = \quad + 210 \ = 210$



Dans ce produit, il y a 4 nombres négatifs, c'est à dire un nombre pair.

Par conséquent, le signe du résultat sera **+**.

Maintenant pour chercher la partie numérique du produit, il faut effectuer l'opération suivante:

$3 \times 2 \times 7 \times 1 \times 5$

Pour effectuer ce calcul, nous pouvons changer l'ordre des facteurs. Il est intéressant de regrouper 2 et 5 . Le facteur 1 ne change pas (1 est "neutre" pour la multiplication).

Nous allons donc calculer $2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 1$.

$10 \times 21 = 210$

Le résultat est donc + 210, soit 210

Autres exemples :

Soit à calculer :

B = 3 x (- 2) x (- 2,5) x (- 4,2) x 5 x 4

$B = 3 \times \underline{(-2)} \times \underline{(-2{,}5)} \times \underline{(-4{,}2)} \times 5 \times 4$

$B = \quad - \ 3 \times 2 \times 2{,}5 \times 4{,}2 \times 5 \times 4$

$B = \quad - \ \underline{3 \times 4{,}2} \times \underline{2 \times 5} \times \underline{2{,}5 \times 4}$

$B = \quad - \ 12{,}6 \times 10 \times 10 \ = -1\,260$

Il y a trois facteurs négatifs

Donc le signe du produit est **−** .

Soit à calculer :

C = (- 2,7) x (- 2,098) x 7,12 x 0 x (- 5,26)

$C = (-2{,}7) \times (-2{,}098) \times 7{,}12 \times \underline{0} \times (-5{,}26)$

$C = 0$

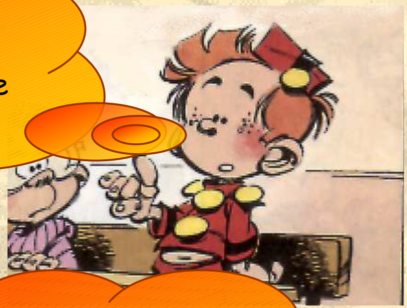
Avant de commencer un calcul, il faut regarder l'expression.

On s'aperçoit qu'un des facteurs est nul (égal à zéro). Or , dans un produit, lorsqu'un facteur est nul, le produit est nul.

Le résultat est donc 0

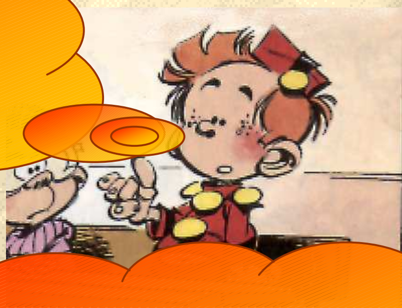
<u>Remarque :</u>
Question : Quel est le signe de - a si a est un nombre relatif ?

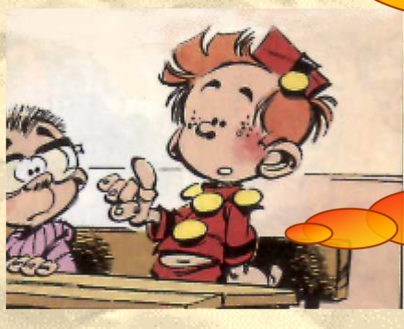
Dans l'écriture de – a , il y a un signe « moins », donc le nombre – a est un nombre négatif !



La lettre a représente un nombre relatif.
Si a est le nombre + 2 (c'est à dire 2) , le nombre – a est égal à :
- (+ 2) , soit – 2
Il est donc négatif.
Et si le nombre a est égal à – 3 ???

Si a est le nombre – 3 , alors
- a = - (- 3) = + 3 !?!?!?!
Ce nombre est positif, donc – a est positif !





J'ai compris .
Si a est positif , le nombre – a est un nombre négatif
Mais
Si a est négatif, alors – a est un nombre positif .

Exact !
Le signe « moins » figurant dans l'écriture – **a** n'est pas un signe (comme – est le signe de – 4 , comme + est le signe de + 5), mais indique que nous cherchons l'opposé de a !

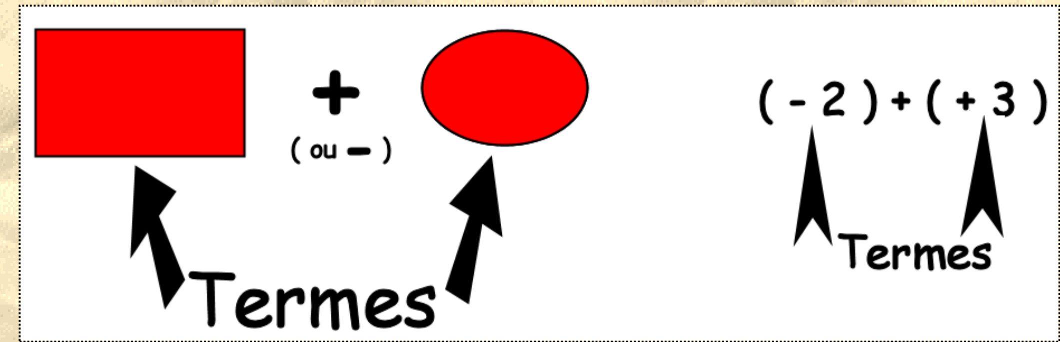
► Multiplication et addition (et soustraction)

Les règles qui s'appliquent au calcul avec des relatifs sont les mêmes règles que celles utilisées dans les classes précédentes.

▶ *Règle 1 :* Le calcul entre parenthèses est prioritaire.

▶ *Règle 2 :* En l'absence de parenthèses, la multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.

Remarque : Définition du mot terme



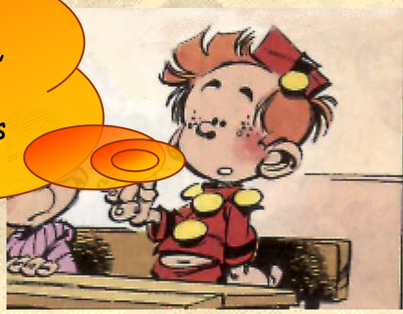
Exemples :

▶ Soit à calculer :

$A = - 5 - 2 \times (- 3)$

Comme il n'y a pas de parenthèses de calcul, la règle 1 ne s'applique pas.
Nous devons donc effectuer, en premier les « multiplications » .

$2 \times (- 3) = - 6$



$A = - 5 - \boxed{2 \times (- 3)}$

$A = - 5 - (- 6)$

$A = - 5 + 6$

$\underline{A = 1}$

Le résultat – 6 étant précédé d'un signe - , nous devons ajouter des parenthèses d'écriture.

▶ Soit à calculer :

$B = - (- 2) \times 2 - (- 3) \times (- 4) + (- 2) \times (- 3)$

$B = - \boxed{(- 2) \times 2} - \boxed{(- 3) \times (- 4)} + \boxed{(- 2) \times (- 3)}$

$B = - (- 4) - 12 + 6$

$B = 4 - 12 + 6 = 10 - 12 = - 2$

$\underline{B = - 2}$

▶ Soit à calculer :

$$C = -(-3)\times 2\times(-1) - (-2)\times(-4)\times(-1) + (-2)\times(-1) - 1$$

$$C = -\boxed{(-3)\times 2\times(-1)} - \boxed{(-2)\times(-4)\times(-1)} + \boxed{(-2)\times(-1)} - 1$$

$$C = -\quad 6 \quad - \quad (-8) \quad + \quad 2 \quad -1$$

$$C = -6 + 8 + 2 - 1 = 10 - 7 = 3$$

$\underline{C = 3}$

<u>Remarque 1 :</u>
Dans ce genre de calcul (lorsque l'expression ne contient pas de parenthèses de calcul), nous pouvons déterminer les calculs prioritaires en repérant les termes. (voir la définition ci-dessus)

Comment déterminer les termes dans une expression ?

On souligne, en partant du début de l'expression, les différents caractères jusqu'à rencontrer un signe + ou – situé en dehors de parenthèses (si l'expression commence par une signe + (en fait inutile) ou un signe -, on continue). Le terme finit juste avant ce signe.
Il suffit de refaire la même chose jusqu'à la fin de l'expression.
Lorsque le caractère souligné est une parenthèse, nous pouvons nous déplacer jusqu'à la parenthèse fermée associée (sans faire attention aux caractères situés dans cette parenthèse).
Reprenons l'exemple précédent.

Premier caractère : un signe - .
On continue.

Caractère suivant : une parenthèse. On souligne jusqu'à la parenthèse fermée associée.

$$C = \underline{-(-3)\times 2\times(-1)} - (-2)\times(-4)\times(-1) + (-2)\times(-1) - 1$$

On continue.

Une parenthèse. On souligne jusqu'à la parenthèse fermée associée.

Un signe – qui n'est pas situé dans des parenthèses. C'est la fin du terme .
Le terme est donc :
$-(-3)\times 2\times(-1)$

$$C = \underline{-(-3)\times 2\times(-1)} - \underline{(-2)\times(-4)\times(-1)} + (-2)\times(-1) - 1$$

Début du terme suivant.
C'est une parenthèse donc on se déplace jusqu'à la parenthèse fermée associée.

Ce n'est pas un signe + ou - , donc on continue.

Un signe + qui n'est pas situé dans des parenthèses. C'est la fin du terme .
Le terme est donc :
$(-2)\times(-4)\times(-1)$

$C = -(-3) \times 2 \times (-1) - (-2) \times (-4) \times (-1) + (-2) \times (-1) - 1$

Début du terme suivant.
C'est une parenthèse donc on se déplace jusqu'à la parenthèse fermée associée.

Un signe - qui n'est pas situé dans des parenthèses. C'est la fin du terme .
Le terme est donc :
$(-2) \times (-1)$

$C = -(-3) \times 2 \times (-1) - (-2) \times (-4) \times (-1) + (-2) \times (-1) - 1$

Début du terme suivant.
Et …… fin (fin de l'expression) !
Le dernier terme est 1

Cette expression comporte donc quatre termes .

Intérêt de cette recherche de termes ?

Lorsqu'il n'y a pas de parenthèses de calcul, la recherche des termes permet de déterminer les calculs prioritaires.
Reprenons le calcul de l'expression C.

$C = -(-3) \times 2 \times (-1) - (-2) \times (-4) \times (-1) + (-2) \times (-1) - 1$

$C = -6 - (-8) + 2 - 1$

Trois (nombre impair) signes – donc le signe du produit est –

Trois (nombre impair) signes – donc le signe du produit est – ; Parenthèses nécessaires

Deux (nombre pair) signes – donc le signe du produit est + ;
Mais comme + 2 = 2 , nous écrirons 2 .

$C = -6 + 8 + 2 - 1 = 10 - 7 = 3$

$\underline{C = 3}$

Remarque :
Nous pouvons encore être plus rapide en incluant, dans le calcul, le signe d'opération qui précède le terme.
Reprenons une dernière fois le calcul de l'expression C.

C = - (- 3) x 2 x (- 1) - (- 2) x (- 4) x (- 1) + (- 2) x (- 1) - 1

C = - 6 + 8 + 2 - 1

Trois (nombre impair) signes – donc le signe du produit est –

Quatre (nombre pair) signes – (en comptant le signe de soustraction) donc le signe du produit est + ;

Deux (nombre pair) signes – donc le signe du produit est + ;

▶ Soit à calculer :

D = - (- 1) x 2 x (- 3) - (- 2) x (- 1) x 2 - (- 1) x 3 x (- 1) x (- 1)

D = - (- 1) x 2 x (- 3) - (- 2) x (- 1) x 2 - (- 1) x 3 x (- 1) x (- 1)

D = - 6 - 4 + 3

D = 3 - 10 = - 7

<u>D = - 7</u>

▶ Soit à calculer :

E = - (- 2 – 1) x (- 3 + 5) - (- 2) x (- 1 - 3)

E = - (- 2 – 1) x (- 3 + 5) - (- 2) x (- 1 – 3)

Le calcul entre parenthèses est prioritaire

E = - (- 2 – 1) x (- 3 + 5) - (- 2) x (- 1 – 3)

E = - (- 3) x 2 – (- 2) x (- 2)

Ces parenthèses ne sont pas des parenthèses de calcul, mais des parenthèses d'écriture.

Nous devons donc effectuer les trois calculs suivants :
- 2 – 1 ; - 3 + 5 et - 1 - 3

(Attention aux parenthèses d'écritures)

Soulignons maintenant les termes.

E = - (- 3) x 2 – (- 2) x (- 2)

E = 6 - 4 = 2

<u>E = 2</u>

▶ Soit à calculer :

F = (- 3 + 2 x 2) x (- 1 x 4 – 2) - (- 2 - 1) x (- 3 x 2 + 2 x 2)

Le calcul entre parenthèses est prioritaire

F = (- 3 + 2 x 2) x (- 1 x 4 – 2) – (- 2 – 1) x (- 3 x 2 + 2 x 2)

Nous devons effectuer en priorité les calculs soulignés :

- 3 + 2 x 2
- - 1 x 4 – 2
- - 2 – 1
- - 3 x 2 + 2 x 2

Mais ces calculs contiennent des opérations différentes.
Nous pouvons, comme dans les exemples précédents, souligner les différents termes (ou repérer, pour des expressions simples, les calculs prioritaires)

F = (- 3 + 2 x 2) x (- 1 x 4 – 2) – (- 2 – 1) x (- 3 x 2 + 2 x 2)

Tant que le résultat des parenthèses n'est pas totalement calculé, nous devons laisser les parenthèses.

F = (- 3 + 4) x (- 4 – 2) – (- 3) x (- 6 + 4)

F = 1 x (- 6) – (- 3) x (- 2)

F = - 6 - 6

F = - 12

▶ Soit à calculer :

G = - (- 2 x 2 + 3) – 2 x [- (- 2 + 2 x 2) x (- 1 + 2) – 1]

G = - (- 2 x 2 + 3) – 2 x [- (- 2 + 2 x 2) x (- 1 + 2) – 1]

Etape 1 :
Le calcul entre parenthèses est prioritaire.

Etape 2 :
- (- 2 + 2 x 2) x (- 1 + 2) – 1
Le calcul entre parenthèses est prioritaire.

Etape 3 :
Priorité des calculs

G = - (- 4 + 3) – 2 x [- (- 2 + 4) x 1 – 1]

G = - (- 1) – 2 x [- 2 x 1 – 1]

G = - (- 1) – 2 x [- 2 – 1]

$G = -(-1) - 2 \times (-3)$

Attention : parenthèses d'écriture

$G = -(-1) + 6$

$G = 1 + 6 = 7$

<u>$G = 7$</u>