THEME 8 :

FACTORISATION

SUPPLEMENT

DANS UN TERME (OU PLUSIEURS) APPARAÎT L'OPPOSÉ D'UN ÉVENTUEL FACTEUR COMMUN

Exemple : Factoriser l'expression suivante :

$J = \underline{(3x - 5)(5x - 4)} - \underline{(5 - 3x)(x - 1)}$

Nous constatons que dans le premier terme figure le facteur (3x – 5) et dans le second, figure le facteur (5 – 3x).

Existe-t-il un lien entre ces deux facteurs ?

Nous avons : (cf. ci-contre)

$(5 - 3x) = -(3x - 5)$

Par suite, l'expression peut s'écrire :

$J = (3x - 5)(5x - 4) - [-(3x - 5)](x - 1)$

Soit encore, en appliquant la règle des signes :

$J = (3x - 5)(5x - 4) + (3x - 5)(x - 1)$

Nous sommes revenus au cas " Un facteur commun est évident". La forme factorisée est donc :

$J = (3x - 5)(6x - 5)$

> 5 – 3 = 2 et 3 – 5 = - 2.
> De même
> a – b et b – a sont opposés.
> Donc :
> b – a = - (a – b)

Remarques :

1)Il n'y a aucun lien entre 3x + 5 et 3x – 5 (ou plus généralement entre ax + b et ax – b).

2)Soit $J' = (2x - 1)(3x - 4) - (1 - 2x)^2$

Si $(1 - 2x) = -(2x - 1)$, il est à remarquer que $(1 - 2x)^2 = [-(2x - 1)]^2 = (2x - 1)^2$

Donc l'expression J' s'écrira :

$J' = (2x - 1)(3x - 4) - (2x - 1)^2$

DANS CERTAINS CAS, IL EST NECESSAIRE DE REGROUPER CERTAINS TERMES

Exemple 1 : Factoriser l'expression suivante :

$H = \underline{(2x + 1)(2x + 3)} - \underline{3(x + 2)(2x + 1)} - \underline{4x^2} \; \underline{+ 1}$

Remarque : Si la suppression de parenthèses précédées d'un signe « - » entraîne des changements de signes à l'intérieur de celles-ci, l'adjonction de parenthèses devant un signe « - » entraîne une modification analogue.

…………………… $- 4x^2 + 1 =$ …………………… $- (4x^2 - 1)$

…………………… $- 2x - 3 =$ …………………… $- (2x + 3)$

…………………… $- x^2 + 2x - 1 =$ …………………… $- (x^2 - 2x + 1)$

Revenons à notre exemple. En regroupant les deux derniers termes, nous avons :

$$H = \underline{(2x + 1)(2x + 3)} - \underline{3(x + 2)(2x + 1)} - \underline{(4x^2 - 1)}$$

Cette expression comporte maintenant trois termes. La simplification du troisième terme (identité remarquable) nous conduit à :

$$H = \underline{(2x + 1)(2x + 3)} - \underline{3(x + 2)(2x + 1)} - \underline{(2x + 1)(2x - 1)}$$

Par suite, étant revenu au cas « Un facteur commun est évident », nous avons :

$$H = (2x + 1) [(2x + 3) - 3(x + 2) - (2x - 1)]$$

$$H = (2x + 1) [2x + 3 - 3x - 6 - 2x + 1]$$

Soit $H = (2x + 1)(- 3x - 2)$

Remarque :

Remarquons que $(- 3x - 2) = (- 1)(3x + 2) = - (3x + 2)$

Donc :

$$H = (2x + 1).(- 1)(3x + 2) = (- 1)(2x + 1)(3x + 2)$$

Donc $H = - (2x + 1)(3x + 2)$

Exemple 2 : Factoriser l'expression suivante :

$$K = x^2 - 2x + 1 - (x - 1)(2x + 3)$$

Dans cet exemple, nous devons regrouper les trois premiers termes. Nous obtenons alors :

$$K = (x^2 - 2x + 1) - (x - 1)(2x + 3)$$

Sachant que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, nous obtenons successivement :

$$K = (x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3)$$

$$K = (x - 1) [(x - 1) - (2x + 3)]$$

$$K = (x - 1) [x - 1 - 2x - 3]$$

$K = (x - 1) (- x - 4)$ ou encore $K = - (x - 1)(x + 4)$

Exemple 3 : Factoriser l'expression suivante :

$$L = 2x + (2x - 3)(x + 2) - 3$$

Les termes à regrouper sont, dans ce cas , le premier et le dernier .

$$L = 2x - 3 + (2x - 3)(x + 2)$$

$$L = (2x - 3) + (2x - 3)(x + 2)$$

$$L = (2x - 3) [1 + (x + 2)]$$

$$L = (2x - 3)(x + 3)$$

CAS PARTICULIERS

Remarque 1 : Le « facteur commun » peut également être un produit de facteurs.

Considérons l'expression suivante :

$$M = (3x - 6)(4x^2 - 1) + (2x - 4)(2x - 1)^2$$

Cette expression, composée de deux termes, ne comporte pas de facteur commun évident. Elle ne représente pas, non plus, la forme d'une identité remarquable.

Simplifions alors chaque terme.

$$M = 3(x - 2)(2x + 1)(2x - 1) + 2(x - 2)(2x - 1)(2x - 1)$$

Le produit $(x - 2)(2x - 1)$ est commun aux deux termes.

$$M = \underline{3(x - 2)(2x + 1)(2x - 1)} + \underline{2(x - 2)(2x - 1)(2x - 1)}$$

Nous avons donc :

$$M = (x - 2)(2x - 1)[3(2x + 1) + 2(2x - 1)]$$

$$M = (x - 2)(2x - 1)[6x + 3 + 4x - 2]$$

$$M = (x - 2)(2x - 1)(10x + 1)$$

Il convient de « mettre en facteur » le plus grand nombre possible de facteurs communs aux différents termes.

Remarque 2 :

La démarche proposée par l'organigramme ci-après ne convient malheureusement pas à toutes les factorisations présentées dans les classes de Troisième et Seconde. Traitons l'exemple ci-après :

$$N = (x^2 - 16)^2 - (x - 4)^2$$

Si nous suivons le plan présenté par l'organigramme, nous devons considérer cette expression comme une différence de deux carrés. Nous avons alors :

$$N = [(x^2 - 16) + (x - 4)][(x^2 - 16) - (x - 4)]$$

Soit $N = (x^2 + x - 20)(x^2 - x - 12)$

Si l'expression est bien sous la forme d'un produit de facteur, les facteurs ne sont pas du premier degré, mais du second degré. Dans la mesure du possible, il est préférable d'avoir des facteurs du premier degré. Peut-on procéder différemment ?

L'expression $x^2 - 16$ doit d'abord être considérée comme une différence de deux carrés.

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$$

L'expression N peut donc s'écrire :

$$N = [(x + 4)(x - 4)]^2 - (x + 4)^2$$

Soit $N = \underline{(x + 4)^2 (x - 4)^2} - \underline{(x + 4)^2}$

Cette expression comporte deux termes. Le « facteur » $(x + 4)^2$ est commun aux deux termes. Nous avons alors :

$$N = (x + 4)^2 [(x - 4)^2 - 1]$$

Soit $N = (x + 4)^2[x^2 - 8x + 16 - 1] = (x + 4)^2 (x^2 - 8x + 15)$

Là encore, nous sommes en présence d'un facteur (le deuxième) du second degré.

Il est donc préférable de ne pas développer et de constater que le second facteur est une différence de deux carrés.

$$N = (x + 4)^2 [(x - 4)^2 - 1]$$

$$N = (x + 4)^2 [(x - 4) + 1][(x - 4) - 1]$$

$$N = (x + 4)^2 (x - 3)(x - 5)$$

Remarque 3 :

Considérons l'expression suivante :

$$A = x^2 + 4x + 3$$

Factoriser l'expression A sachant que $3 = 4 - 1$.

Utilisons l'aide donnée !!!!

Nous avons :

$A = x^2 + 4x + (4 - 1)$

$A = x^2 + 4x + 4 - 1$

En regroupant les trois premiers termes (la connaissance des identités remarquables est primordiale), nous obtenons :

$A = (x^2 + 4x + 4) - 1$

Soit

$A = (x + 2)^2 - 1$ (car $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 . 2 . x + 2^2 = (x + 2)^2$)

L'expression A comporte maintenant deux termes. C'est une différence de deux carrés. Nous avons donc :

$A = (x + 2)^2 - 1^2$

$A = [(x + 2) + 1][(x + 2) - 1]$

$A = [x + 2 + 1][x + 2 - 1]$ soit $A = (x + 3)(x + 1)$

Remarque 3 :

De nombreuses autres méthodes peuvent être utilisées pour factoriser une expression. (cf. exercices)

Factoriser :

$A = (x - 1)(3x - 9) + (x^2 - 9) - 2x^2 + 12x - 18$