THEME 8 :

CALCUL D'UNE EXPRESSION LITTERALE POUR DES VALEURS NUMERIQUES DE LA VARIABLE

Introduction :

Lorsque nous désirons calculer l'aire d'un rectangle, nous pouvons nous remémorer la propriété suivante :

« L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa longueur et de sa largeur » .

Il est plus simple de connaître la formule suivante, plus courte, plus concise :

$$\mathcal{A} = L \times \ell = L\ell \quad \text{(avec L longueur et } \ell \text{ largeur)}$$

Cette formule littérale (utilisant des lettres) ne donne pas un « résultat », mais un procédé à utiliser dans un cas particulier. Pour calculer l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont 5 cm et 3 cm, il suffit de reprendre cette formule et de remplacer L par 5 et ℓ par 3. Nous aurons ainsi :

$$\mathcal{A} = 5 \times 3 = 15 \ (\text{cm}^2)$$

Si, dans un autre exercice, les dimensions du rectangle sont 8 cm et 3,5 cm, son aire sera égale à :

$$\mathcal{A} = 8 \times 3{,}5 = 28 \ (\text{cm}^2)$$

Remarque : Attention à l'écriture $L\ell$. En remplaçant L et ℓ par des valeurs numériques, il est impératif de réécrire le signe de multiplication que nous avons l'habitude d'omettre.

Exemples :

▶ Soit $A = 3a - 2b + 1$.

Calculer l'expression A pour a = 2 et b = - 1. (le symbole x est dans cette exemple le signe de multiplication)

$$A = 3\underbrace{a}_{2} - 2\underbrace{b}_{-1} + 1$$

Remplaçons donc a par 2 et b par – 1. Comme rappelé précédemment, nous devons réécrire les symboles de multiplication (2 a signifie en réalité 2 x a)

Attention également à certaines conventions d'écriture. Deux symboles ne pouvant se suivre, des parenthèses d'écriture sont parfois nécessaires.

Nous obtenons :

$A = 3 \times 2 \quad - \quad 2 \times (-1) \quad + \quad 1$

Parenthèses d'écriture obligatoires

La multiplication étant prioritaire, nous avons :

$A = 3 \times 2 \quad - \quad 2 \times (-1) \quad + \quad 1$

$A = \quad 6 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1$

Signe : 2 signes négatifs ▷▷▷ **+**
Partie numérique : 2 x 1 = 2

Et enfin :

$A = 9$

▶ Soit $B = 2x^2 - 3x + 5$.

Calculer l'expression B pour $x = 0$, puis pour $x = -\frac{1}{2}$ (le symbole x est dans cette exemple la lettre x)

Calcul de B pour x = 0 :
Remplaçons x par 0 dans l'expression B . Nous avons :

$B = 2\times0^2 - 3\times0 + 5$ ($\times$ est ici le symbole de la multiplication – La lettre x ne peut plus exister dans cette expression , puisqu'elle a été remplacée par le nombre 0).

En utilisant les priorités de calcul (priorité à l'élévation à une puissance , puis à la multiplication et la division, puis à l'addition et la soustraction), nous obtenons :

$B = 2\times0 - 3\times0 + 5$

$B = 0 - 0 + 5 = 0$

Calcul de B pour $x = -\frac{1}{2}$:

Nous avons :

$B = 2\times(-\frac{1}{2})^2 - 3\times(-\frac{1}{2}) + 5$

$B = 2\times\frac{1}{4} - 3\times(-\frac{1}{2}) + 5 \quad$ car $(-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}) = +\frac{1\times1}{2\times2} = \frac{1}{4}$

$B = \frac{2}{1}\times\frac{1}{4} - \frac{3}{1}\times(-\frac{1}{2}) + 5 = \frac{2\times1}{1\times4} + \frac{3\times1}{1\times2} + 5 = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} + 5$

$B = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{10}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Exemple (Type Brevet des Collèges) :

On considère l'expression suivante :

$E = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 4)$

a)Développer et réduire E

b) Factoriser E

c)Calculer E pour $x = 0$, $x = -2$ et pour $x = \frac{3}{2}$

Solution :

a)Développement de E :

$$E = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 4)$$
$$E = (4x^2 - 12x + 9) - (2x^2 - 8x - 3x + 12)$$
$$E = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 8x + 3x - 12$$
$$E = 2x^2 - x - 3$$

b)Factorisation de E :

$$E = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 4)$$
$$E = (2x - 3)[(2x - 3) - (x - 4)]$$
$$E = (2x - 3)[2x - 3 - x + 4]$$
$$E = (2x - 3)(x + 1)$$

c) Calcul de E pour certaines valeurs numériques :

▶ Si $x = 0$

(Avec la forme initiale)

$$E = (2\times 0 - 3)^2 - (2\times 0 - 3)(0 - 4)$$
$$E = (0 - 3)^2 - (0 - 3)(0 - 4)$$
$$E = (-3)^2 - (-3)(-4)$$
$$E = 9 - (-3)(-4) = 9 - 12 = -3$$

(Avec la forme développée)

$$E = 2\times 0^2 - 0 - 3$$
$$E = 2\times 0 - 0 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$

(Avec la forme factorisée)

$$E = (2\times 0 - 3)(0 + 1)$$
$$E = (0 - 3)(0 + 1) = -3\times 1 = -3$$

Attention à bien remettre le signe de multiplication !

Remarque : La forme développée est, dans ce cas, beaucoup plus rapide pour effectuer le calcul.

Remarque : N'utilisez pas la forme initiale pour faire ce genre de calcul. Elle conduit à la solution, mais les calculs sont en général plus longs et plus fastidieux !

Remarque : Mais utiliser soit la forme développée, soit la forme factorisée est dangereuse si l'une (ou les eux !) est incorrecte . Il existe un moyen de vérifier les résultats sous forme d'une preuve.

Il suffit (sur le brouillon) de développer la forme factorisée. Nous avons

$$(2x - 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

Nous retrouvons la forme développée (voir question a).

Attention, comme toute preuve, ceci ne permet pas d'affirmer que les deux résultats sont corrects.
Si nous ne retrouvons pas la forme développée, une des deux formes est nécessairement fausse (ou les deux).
Si nous retrouvons la forme développée, il y a «des chances » que les deux formes soient correctes !

▶ Si $x = -2$

(Avec la forme initiale)

$$E = (2\times(-2) - 3)^2 - (2\times(-2) - 3)(-2 - 4)$$
$$E = (-4 - 3)^2 - (-4 - 3)(-2 - 4)$$
$$E = (-7)^2 - (-7)(-6)$$
$$E = 49 - (-7)(-6) = 49 - 42 = 7$$

(Avec la forme développée)

$E = 2 \times (-2)^2 - (-2) - 3$

$E = 2 \times 4 - (-2) - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$

(Avec la forme factorisée)

$E = (2 \times (-2) - 3)(-2 + 1)$

$E = (-4 - 3)(-2 + 1) = -7 \times (-1) = 7$

Attention à bien remettre le signe de multiplication !

Remarque : Pour x = - 2, les deux formes sont équivalentes !

▶ Si $x = \dfrac{3}{2}$

Remarque : Nous ne prendrons pas ici la forme initiale !!!!

(Avec la forme développée)

$$E = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 3$$

$$E = 2 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3$$

$$E = \frac{2}{1} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3$$

$$E = \frac{2 \times 9}{1 \times 4} - \frac{3}{2} - 3 = \frac{\cancel{2} \times 9}{1 \times \cancel{2} \times 2} - \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3$$

$$E = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

(Avec la forme factorisée)

$$E = \left(2 \times \frac{3}{2} - 3\right)\left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$E = \left(\frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2}} - 3\right) \times \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1}\right)$$

$$E = (3 - 3) \times \frac{4}{2} = 0 \times \frac{4}{2} = 0$$

Remarque : Pour $x = \dfrac{3}{2}$, la forme factorisée est préférable.

Conclusion :

Pour calculer la valeur numérique d'une expression, il est judicieux de choisir l'expression qui conduira le plus rapidement au résultat.

Pour l'instant, si nous voulons donner une conclusion rapide, nous pouvons dire :

▶ Pour x = 0 , la forme développée est la plus rapide.

▶ Pour des valeurs entières simples (1 , 2 , - 1 ? , - 2 ??) , les deux formes sont à peu près équivalentes en rapidité et en difficultés.

▶ Pour des valeurs plus compliquées (c'est-à-dire les autres) , il est préférable d'utiliser la forme factorisée !

Remarque : Nous reviendrons sur cette première conclusion. Lorsque les valeurs numériques sont « encore plus compliquées » ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ...) , la forme développée redeviendra plus simple pour les calculs !!!